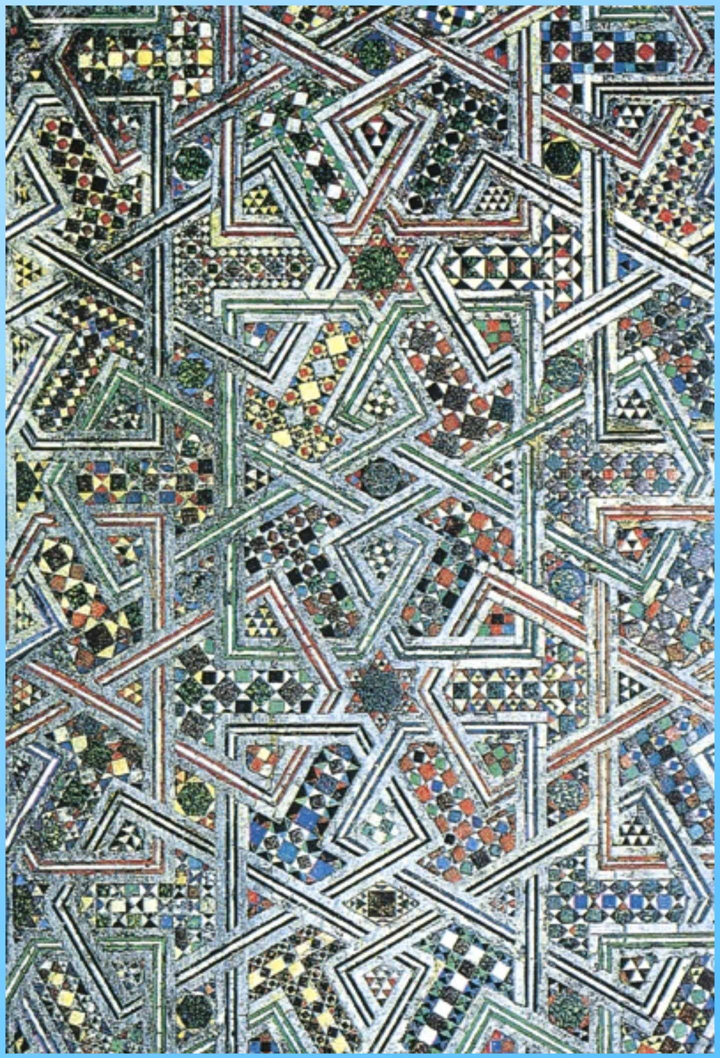
Simmetria… in verticale

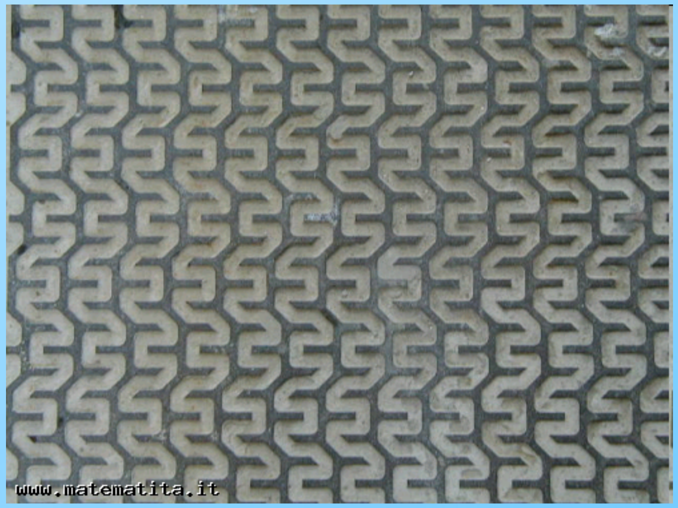
Convegno Pristem + mateinitaly
Giochi matematici e non solo: sfide e parole-chiave
Roma, 29 settembre 2017
M. Dedò

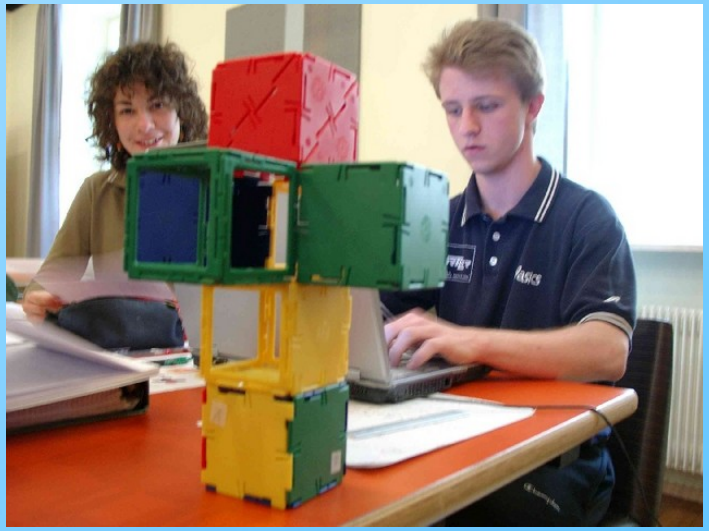
Le parole-chiave di MathUp:

- laboratorio
- problemi e modelli
- essenzialità
- **verticalità**
- matematica e realtà



La simmetria ha qualcosa da dire su *tutte* queste parole-chiave.



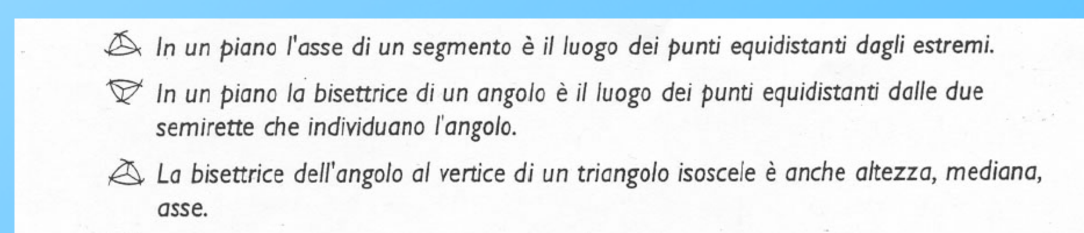


Una mostra

L'esperienza della mostra *Simmetria, giochi di specchi*: proprio dal punto di vista della **verticalità** i *racconti* che si possono costruire in una mostra sono una bella conferma.

La visita a una mostra non è e non deve essere una lezione, però…

Vi siete accorti che…?



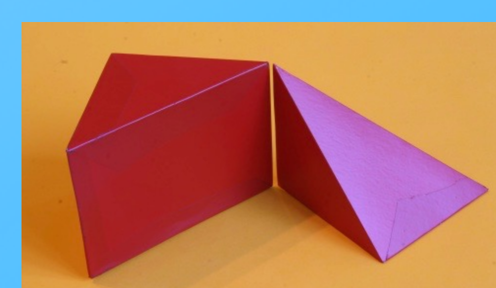
In un piano l'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi.

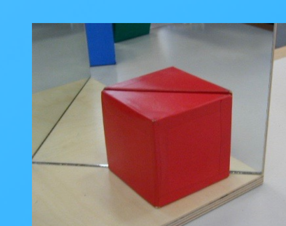
In un piano la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dalle due semirette che individuano l'angolo.

La bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele è anche altezza, mediana, asse.

il massimo comune divisore…

MCD(5,8) = 1
MCD(6,8) = 2





il volume della piramide è 1/3…

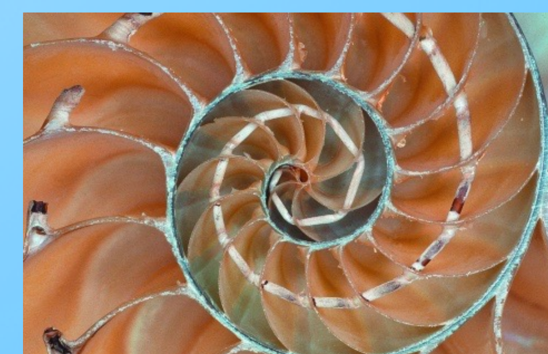
Nel seguito: una *scelta* fra ciò che si può raccontare/fare/far fare di matematica sul tema della simmetria. Si tratta di una *scelta*; (ovviamente!) altre scelte erano possibili.

Esempi di simmetria come strumento per:

- osservare;
- descrivere (linguaggio);
- mettere in ordine (classificazioni);
- visualizzare fatti geometrici (trasformazioni geometriche, 2d e 3d, ma non solo);
- semplificare;
- argomentare;
- introdurre all'astrazione: struttura (gruppi, algebra).

Osservazione

Basta *guardarsi in giro* e occasioni per osservare la simmetria si trovano ovunque…



Sono anche tanti gli spunti *trasversali* offerti *in maniera naturale* dalla simmetria e che possono essere di aiuto, in maniera diversa per i diversi ordini di scuola, ma in **tutti** gli ordini di scuola:

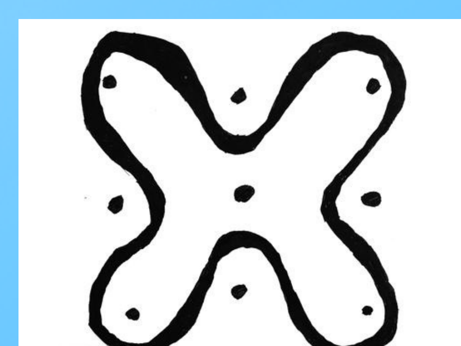
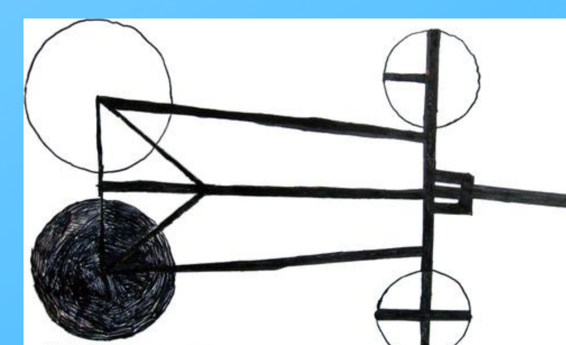
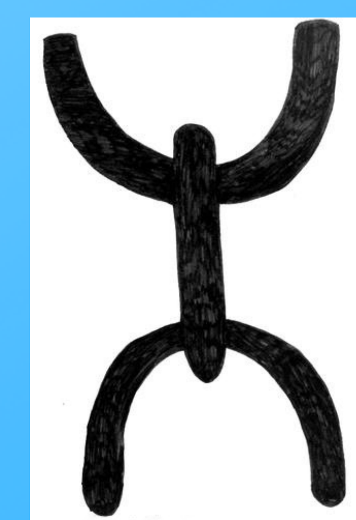
- interdisciplinarietà *vera* (e non forzata);
- agganci alla realtà *veri* (e non forzati).

- Sono tanti gli agganci *superficiali* (dai fiori ai tombini, dall'Alhambra ai mercati…)
- Sono tanti gli agganci *profondi* (dalla fisica, alla chimica, alla musica, alle scienze, alla danza) ⟶ è l'idea di **STRUTTURA**.



… e si tratta di osservazioni che possono restare nel lungo periodo: la simmetria come *chiave di interpretazione della realtà* che può indurre preziose semplificazioni…

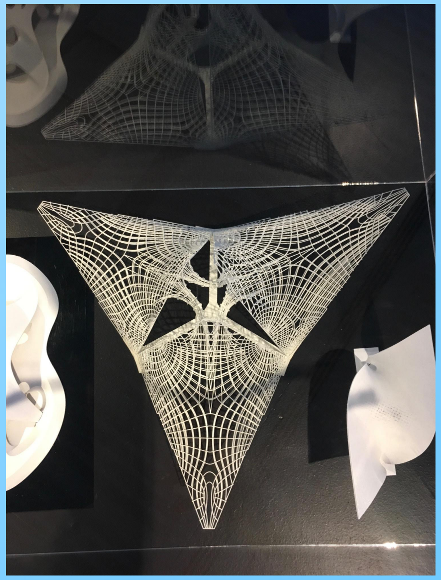
Ma questo è come quello che avevamo visto a Milano, alla mostra della simmetria?

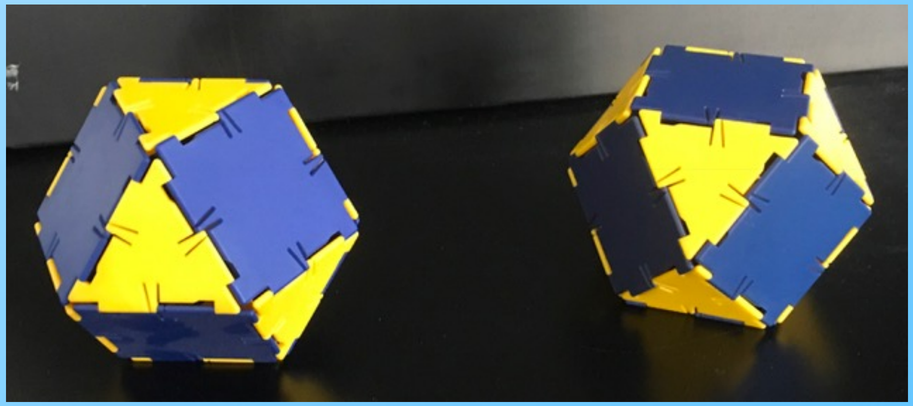
(detto da un alunno di scuola primaria in visita in val Camonica al parco camuno, qualche mese dopo aver visto la mostra *Simmetria, giochi di specchi*).

Osservazione e linguaggio

Quando si *descrive* una figura geometrica o un oggetto, la simmetria spunta *in modo naturale* (più o meno esplicito, più o meno consapevole) come un elemento utile all’osservazione, alla descrizione e alla *semplificazione* (**essenziale**).



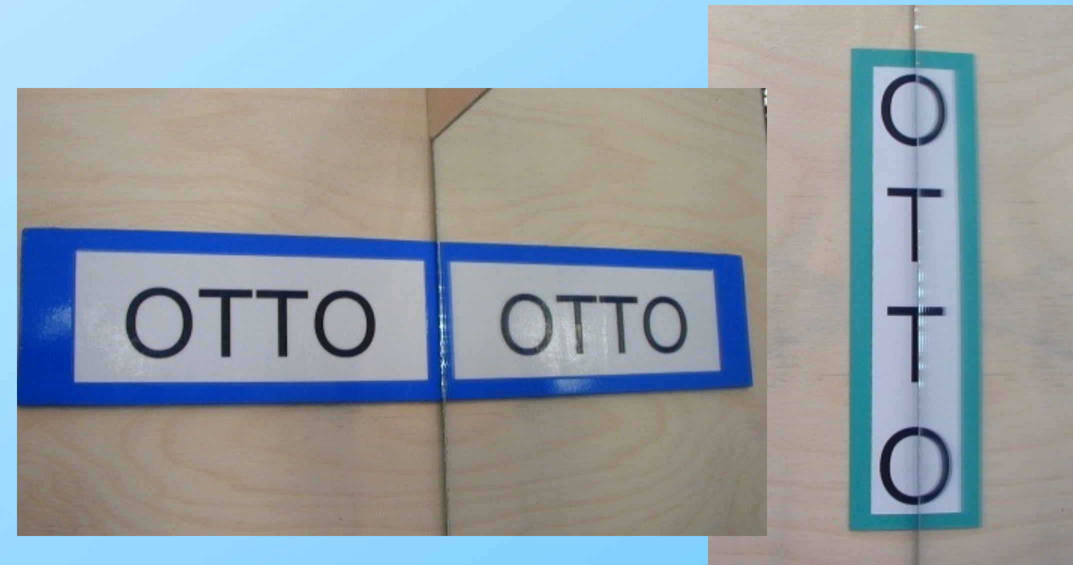
Ed è un problema che (scegliendo oculatamente **cosa** si chiede di descrivere) ha senso a *tutti* i livelli dell’insegnamento; purché naturalmente si inserisca in una situazione coinvolgente.



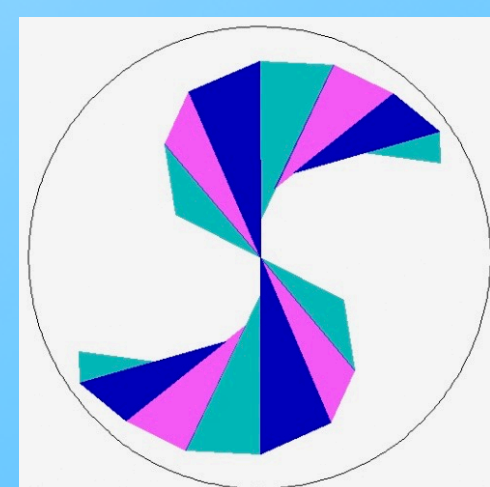
Un *effetto collaterale*: da giochi di descrizione di questo genere è facile che emerga *in maniera naturale* il significato e l’uso di parole come: *il* e *un*; *è necessario che*; *basta che*; *almeno* e *al più*; *esiste* e *ogni*; *e* e *o*; …

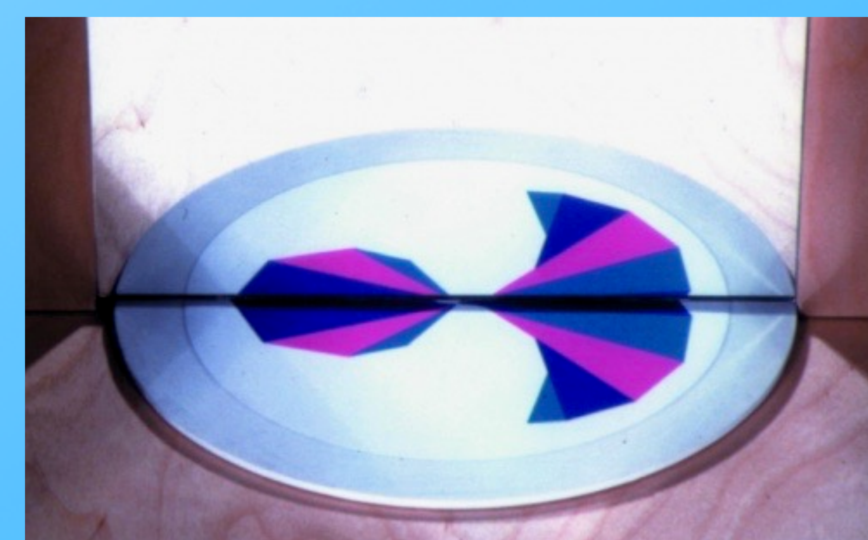
Osservazione e linguaggio

Verticalità, apprendimento a spirale, imparare il linguaggio della matematica e il rigore della matematica. Che cosa vuol dire *corretto*? Come si distingue *rigoroso* da *pedante*?



Perché OSSO non si riflette uguale, mentre OTTO sì?
Perché la S guarda di lato, mentre la T ti guarda dritta.

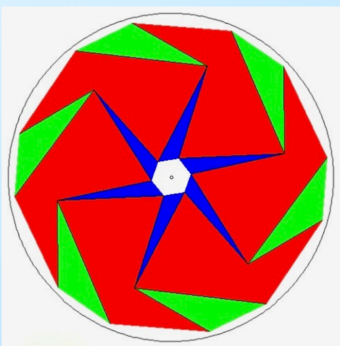


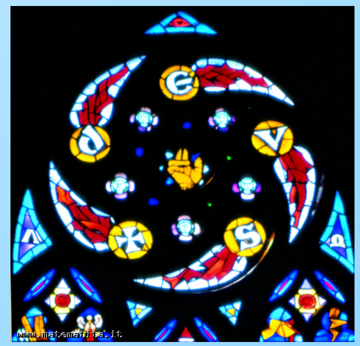


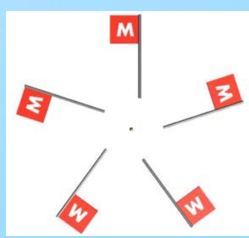
Confrontiamolo con chi recita impeccabilmente la frase (**sbagliata!**) trovata su un libro: *L'asse di simmetria di una figura è una retta che divide la figura a metà.*

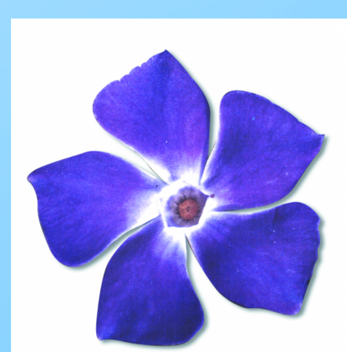
Non è solo *qualcosa per bambini piccini*. A Salorno (*Bottega del Matematico*) gli studenti (grandi: ultimo anno delle scuole superiori) hanno coniato il termine *rotoloso*.

Rosoni ciclici (*rotolosi*)

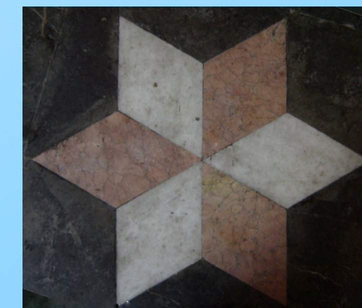


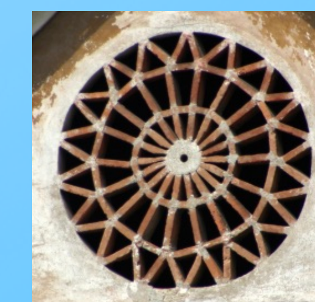


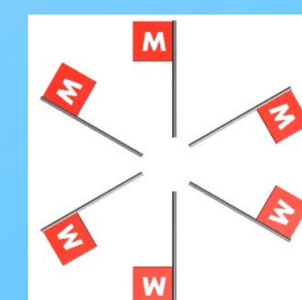
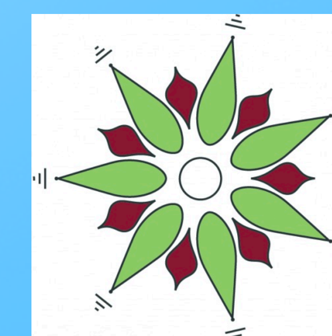



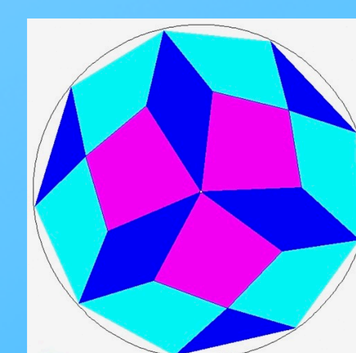




Rosoni diedrali (*sull'attenti*)







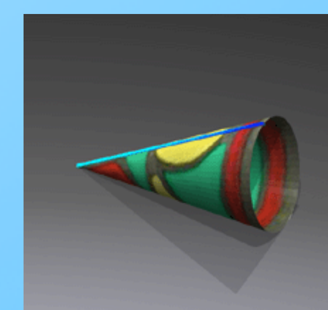
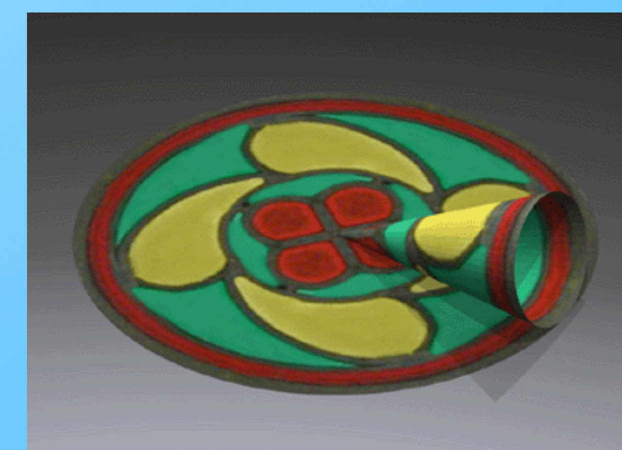

Prima o poi sarà utile imparare la terminologia *tecnica* (gruppo ciclico, gruppo diedrale,…), ma se nel frattempo si usano nomi di fantasia (condivisi!), si può essere più sicuri che il concetto stia crescendo **insieme al significato.**

Osservazione e classificazione

Un passaggio successivo che viene *naturale*, dopo aver osservato, e dopo aver descritto ciò che si è osservato, è quello di *mettere in ordine*: classificare.

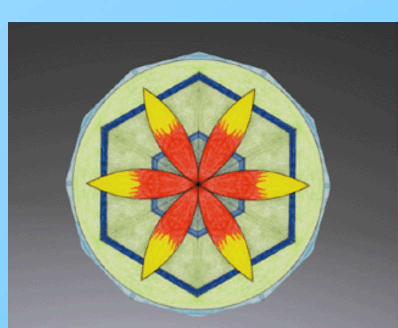
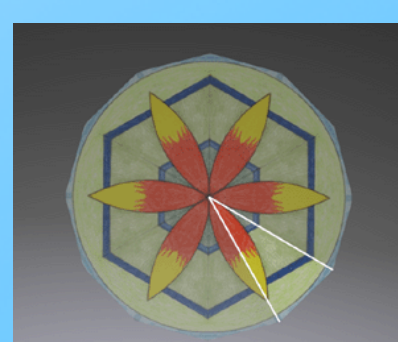
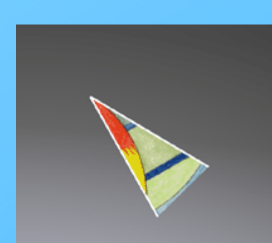
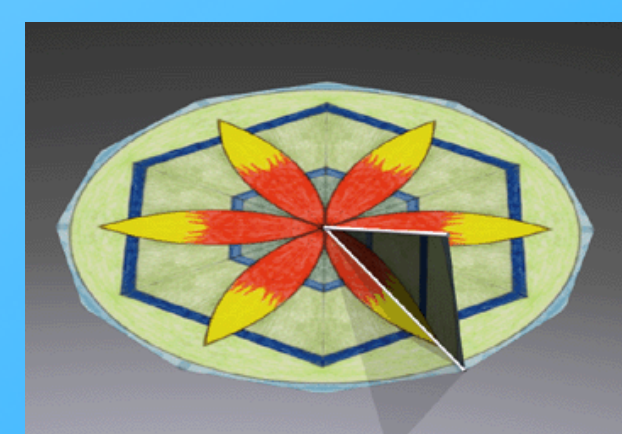
La distinzione fra rosoni ciclici e diedrali è *qualitativa*. I due *timbri* per ricostruirli sono diversi: un cono e un angolo (con le due semirette che fungono da specchio). È invece solo *quantitativa* la differenza fra i diversi rosoni ciclici (varia l'apertura del cono) e fra i diversi rosoni diedrali (varia l'angolo fra i due specchi).



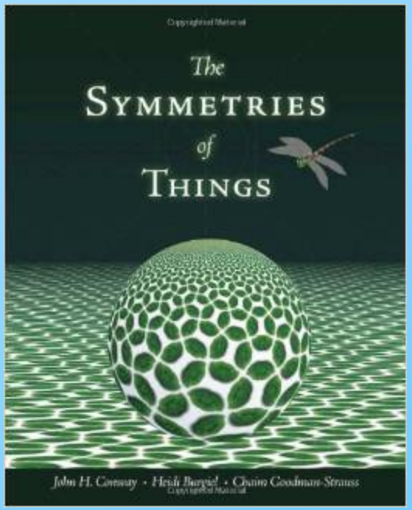



https://www.youtube.com/watch?v=qscfwKPcNOM

Il *timbro* (dall'inglese *orbifold*) è il quoziente (del piano) rispetto al gruppo di simmetria della figura e contiene tutte le informazioni necessarie a ricostruirla.

Osservazione e classificazione



Il punto di vista dei timbri (orbifold) è un bell'esempio di *verticalità* perché può essere affrontato a livelli diversi di difficoltà, di competenza, e di consapevolezza.

Thou shalt know no geometrical group save by understanding its orbifold (Conway, Thurston)

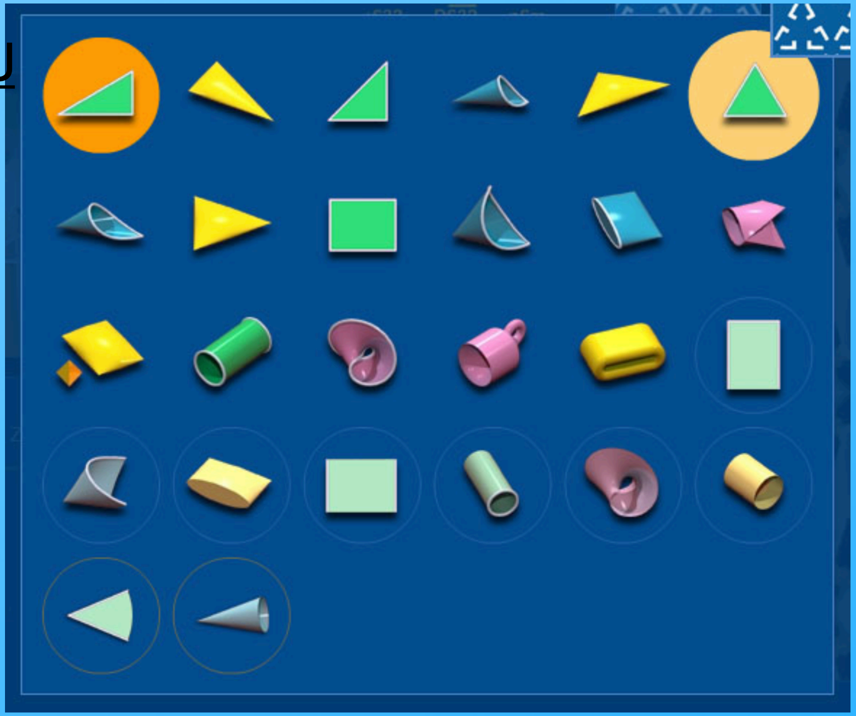
Il programma GeCla (http://www.atractor.pt/mat/GeCla/) permette di scegliere a priori un certo numero di gruppi fra i gruppi dei rosoni, quelli dei fregi (7) e quelli dei mosaici (17) e lavorare solo sui gruppi prescelti (con i relativi *timbri*).

Qualche esempio di timbro fra i rosoni: https://www.youtube.com/watch?v=qscfwKPcNOM

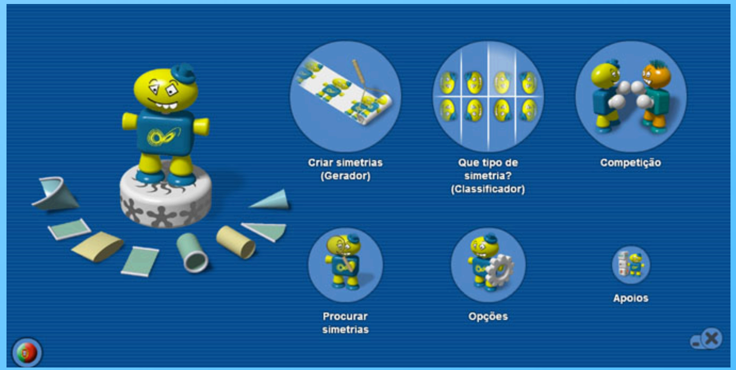
fra i fregi: https://www.youtube.com/watch?v=5omITmscNvU

https://www.youtube.com/watch?v=SdH2SSiAmH0

fra i mosaici: https://www.youtube.com/watch?v=thu1aGHO4JU



Si può adattare al contesto: esiste una versione GeCla Mini.



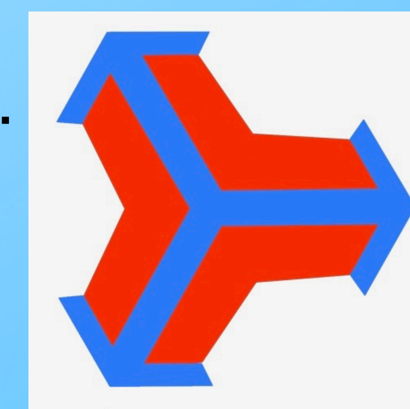
Simmetria e struttura

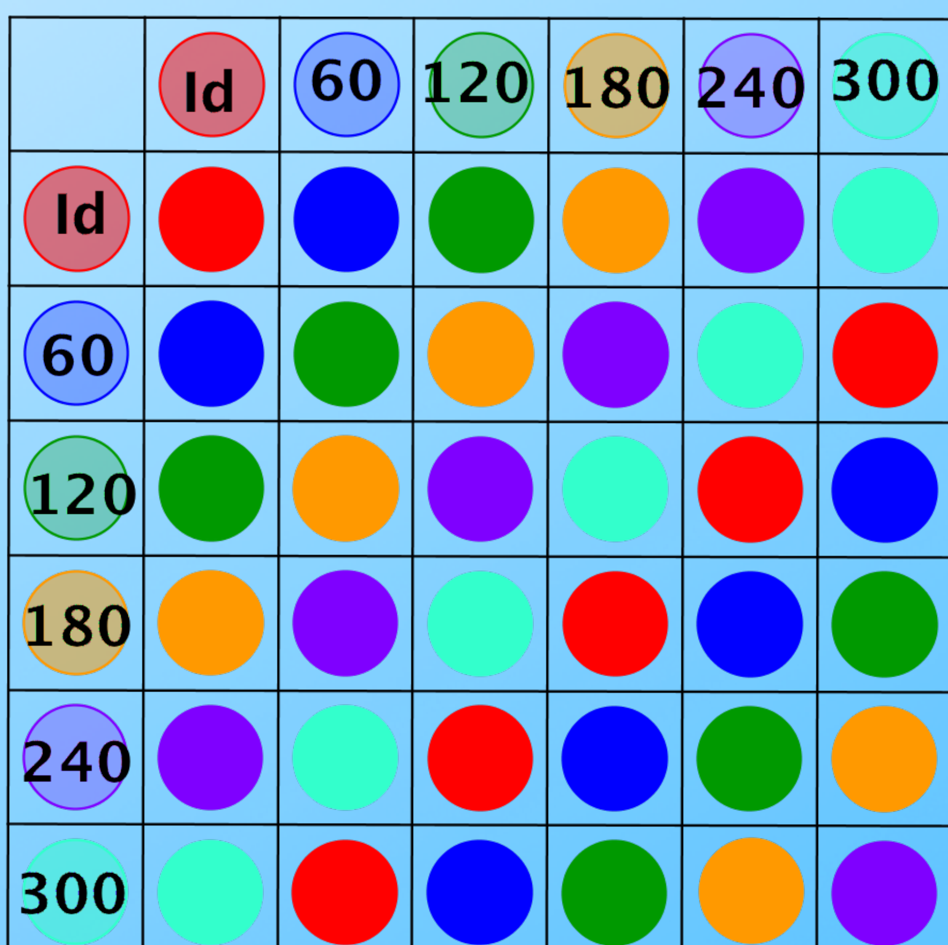
Quello che conta (e balza anche all'occhio) **non** è il *numero* delle simmetrie della figura, ma la loro *struttura*, come si compongono… il *gruppo*.

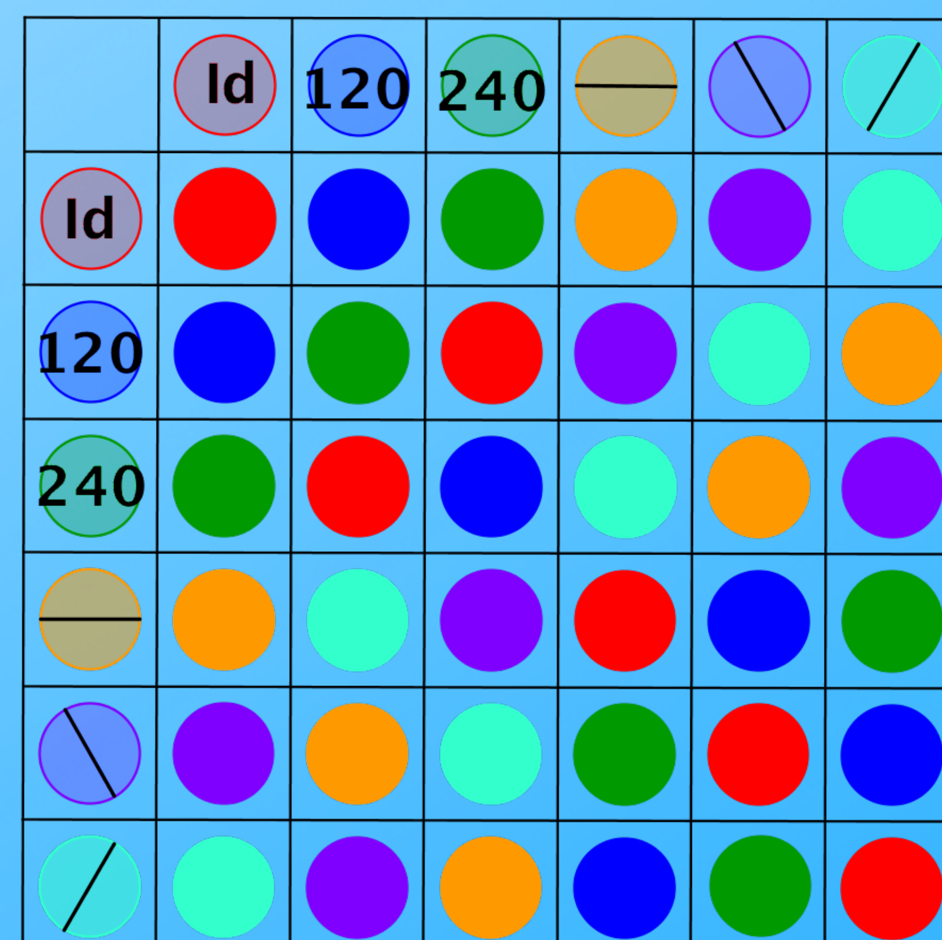
Struttura… algebra… gruppi… classificazione…

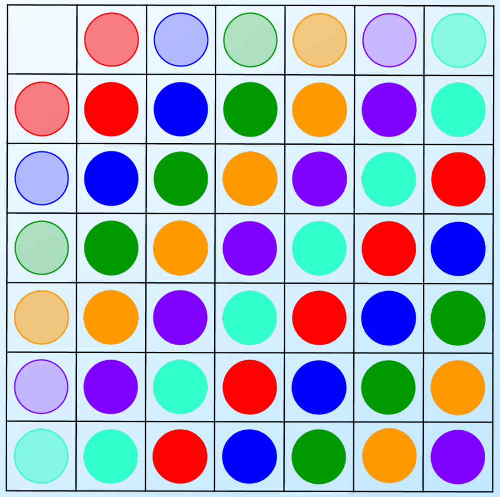
6 rotazioni

3 rotazioni
3 riflessioni







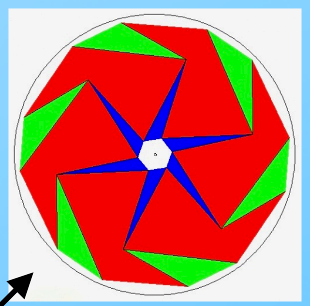


Struttura e astrazione

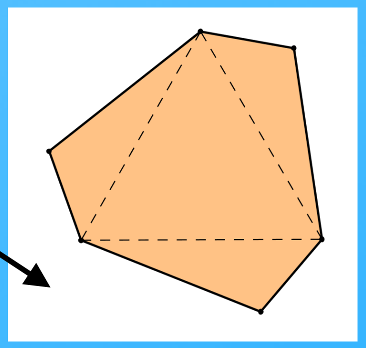
… ma questa è anche la tabella di composizione per:

- il gruppo additivo delle classi di resto modulo 6;
- il gruppo moltiplicativo delle radici seste dell'unità;
- il gruppo moltiplicativo generato da 10 nell'aritmetica modulo 7;
- il gruppo di simmetria di questa figura;
- il sottogruppo generato da (abcde) -> (bcaed) nel gruppo delle permutazioni di 5 elementi;
- il gruppo di simmetria di un prisma (oppure una bipiramide) su un esagono di questo tipo;
- …

1
$10 \equiv 3$
$10^2 \equiv 2$
$10^3 \equiv 6$
$10^4 \equiv 4$
$10^5 \equiv 5$
$10^6 \equiv 1$



(abcde)
(bcaed)
(cabde)
(abced)
(bcade)
(cabed)
(abcde)

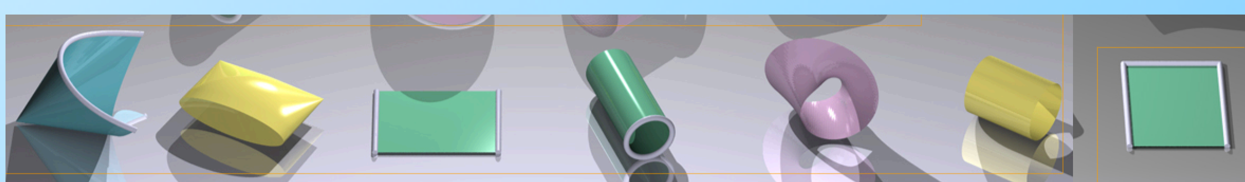


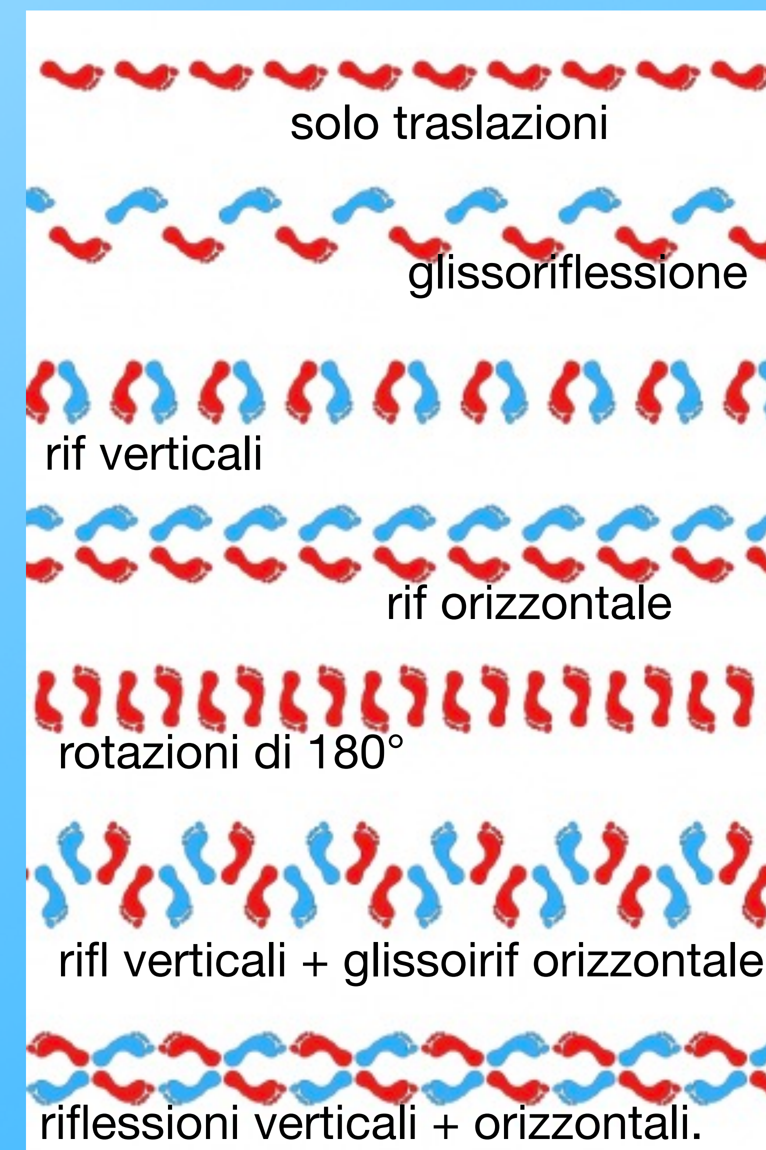
Non c'è bisogno di conoscere la parola *gruppo* e la definizione di gruppo per riconoscere la stessa struttura in situazioni così diverse: e quello che ne esce è il *modello astratto.*

Osservazione e classificazione

Si possono mettere in ordine i fregi e i livelli possibili sono *molto* diversi (*verticalità*):

- distinguere quali *si assomigliano* e quali no (magari anche fra due tipi soltanto);
- individuare e distinguere tutti i sette tipi di fregi;
- individuare nei sette diversi tipi di fregi quali sono, per ciascun tipo, le isometrie coinvolte;





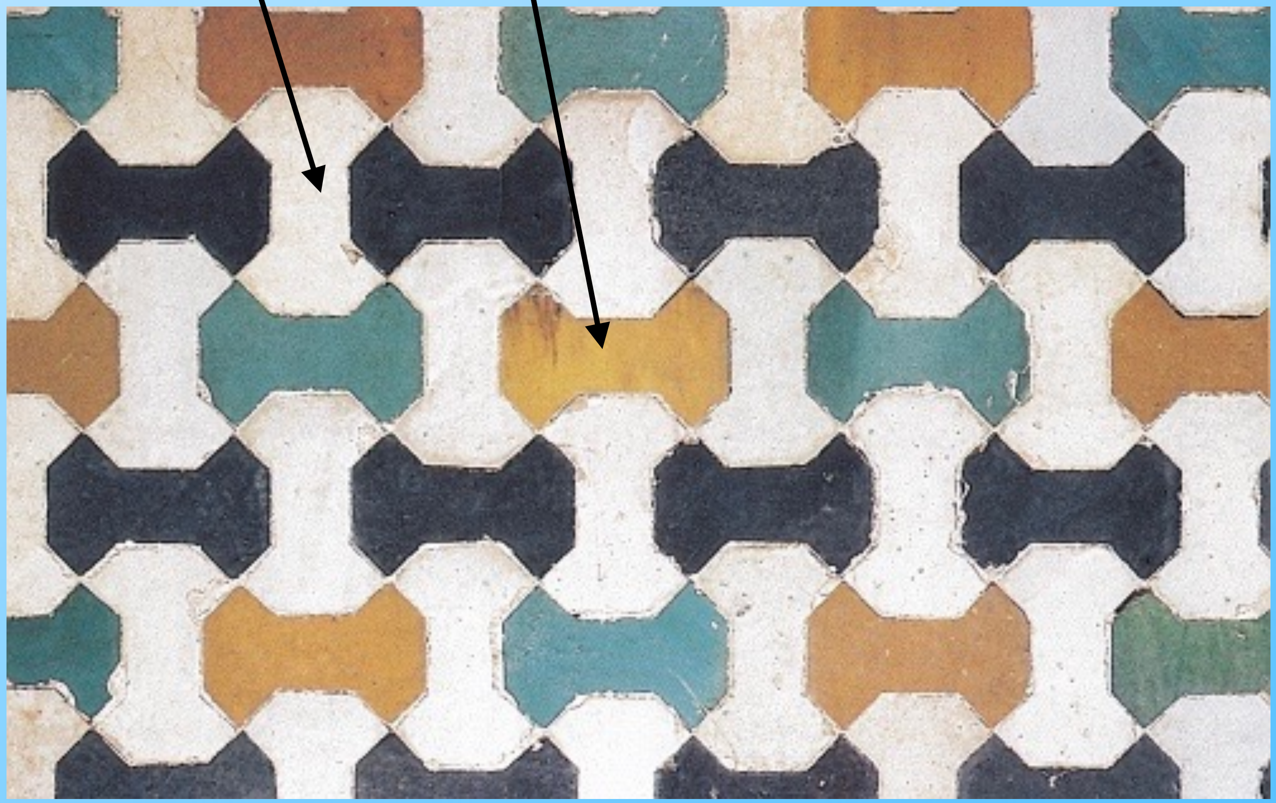
- individuare i sette timbri;
- convincersi che non ci può essere un ottavo tipo;
- …
- riconoscere l'analogia con i sette diversi tipi di gruppi di simmetria (prismatici) nello spazio;
- …

Idem per i mosaici…

Trasformazioni geometriche 2d

Il gruppo di simmetria di una figura (o di un oggetto 3d) è un bel modo per *visualizzare* le isometrie.

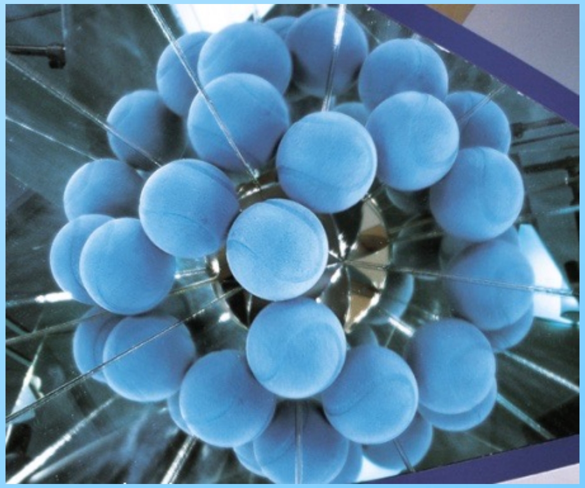
Problema: quale isometria manda questo poligono in quest’altro?



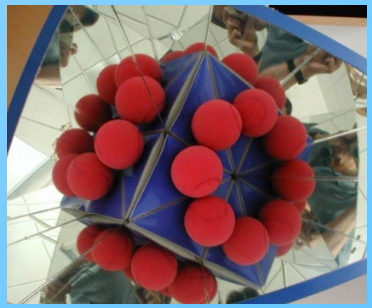
Problema: come si fa a ricostruire queste figure (con un software tipo Geogebra)?

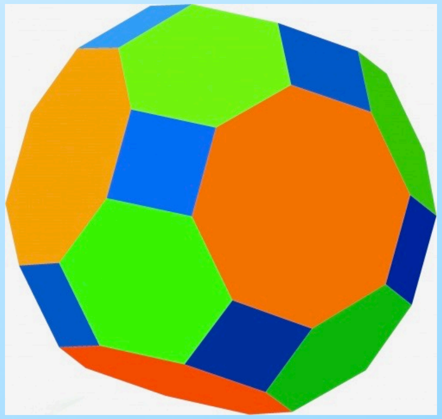
Trasformazioni geometriche 3d

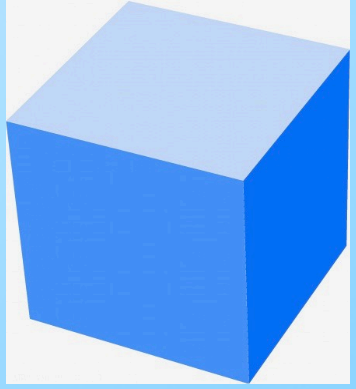
Anche per un oggetto 3d si può porre il problema di identificare e visualizzare quali isometrie lo mandano in sé stesso.

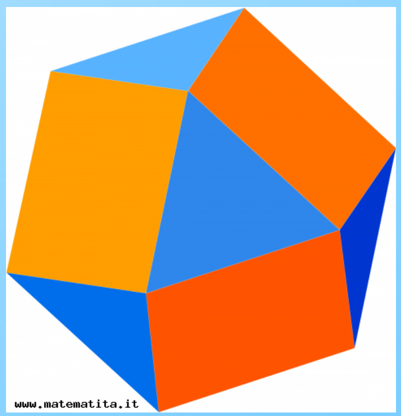


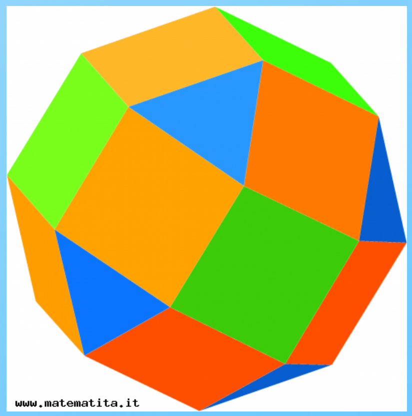
Il gruppo di simmetria è lo stesso.
Non è scontato che sia più facile *visualizzarlo* sul cubo.











I gruppi di simmetria di poligoni e poliedri sono FINITI: si possono *contare* le trasformazioni che fissano la figura (o l'oggetto 3d). I gruppi di fregi e mosaici sono infiniti: la simmetria permette anche di *giocare con l'infinito*…

Simmetria altrove

Kaleidotile, dal sito di Jeff Weeks

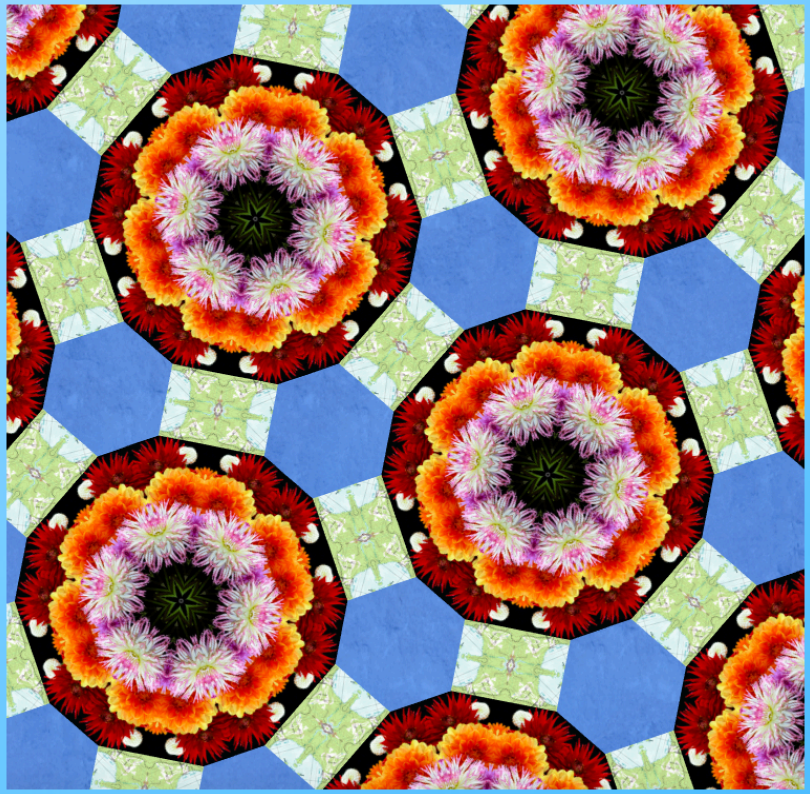
http://www.geometrygames.org/KaleidoTile/index.html.pt

permette di esplorare, *in parallelo*, i diversi tipi di simmetria sul piano, ma anche sulla sfera e anche sul piano iperbolico.

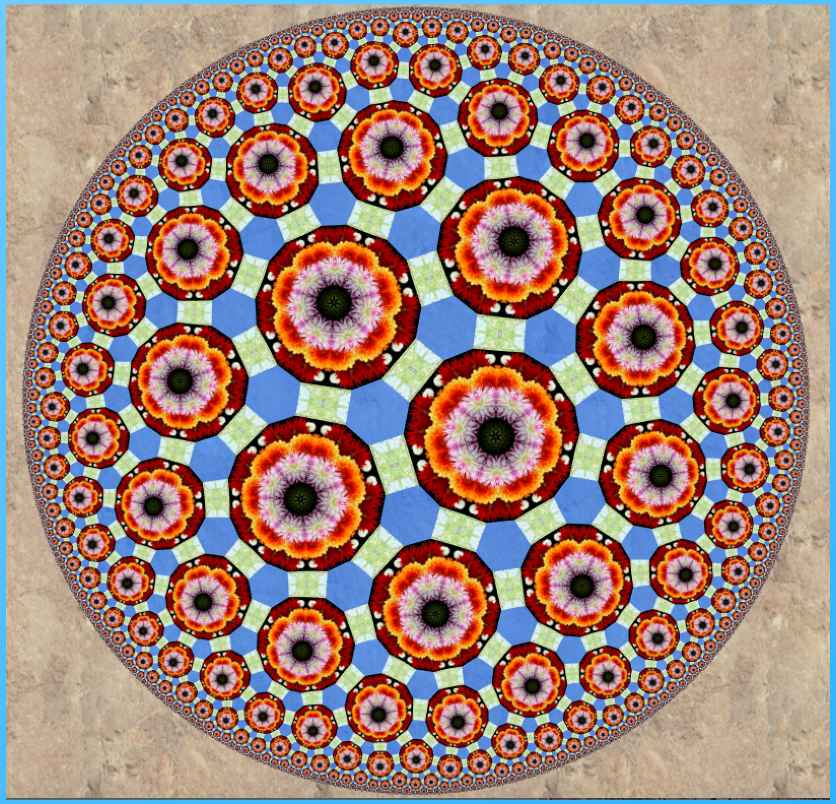
Lo stesso motivo, in una camera di specchi, di angoli rispettivamente:

1/2, 1/3, 1/5
90°, 60°, 36°

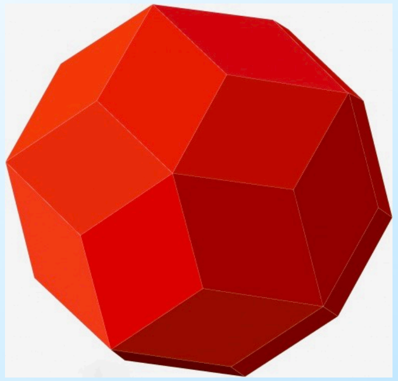
1/2, 1/3, 1/6
90°, 60°, 30°



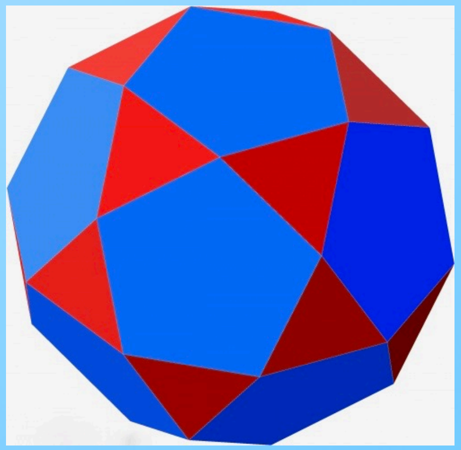
1/2, 1/3, 1/7
90°, 60°, 28,571428…°



Simmetria come strumento per ragionare

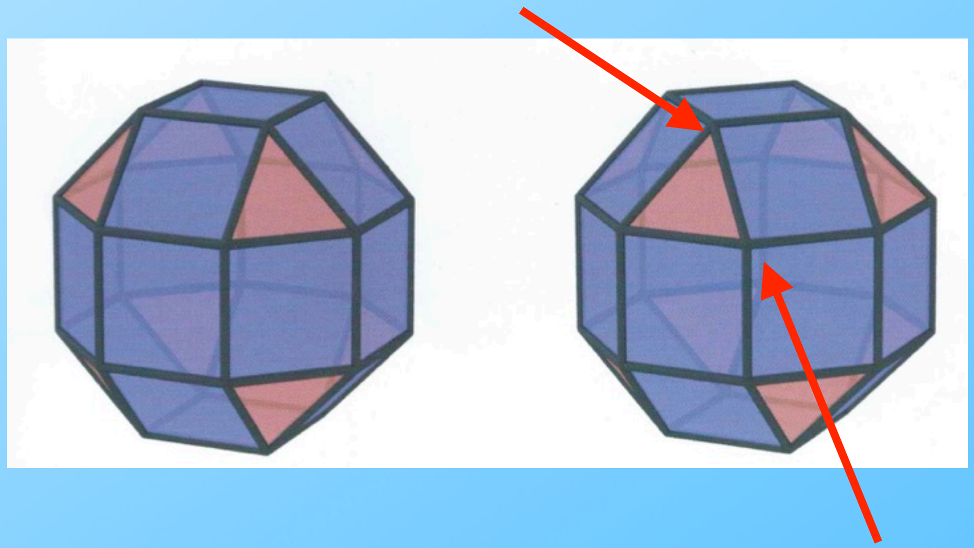


Il poliedro rosso e blu si può chiamare (3,5,3,5) perché tutti i vertici sono *uguali*; ovvero *indistinguibili*: il gruppo di simmetria agisce transitivamente sui vertici. Nel (duale) triacontaedro rombico sono le facce a essere indistinguibili.

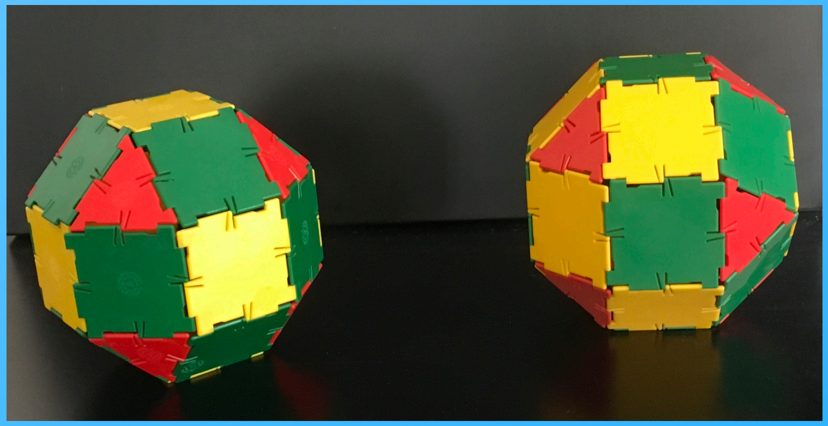


Un poliedro è *regolare* se sia i vertici, sia gli spigoli sia le facce sono *indistinguibili.*

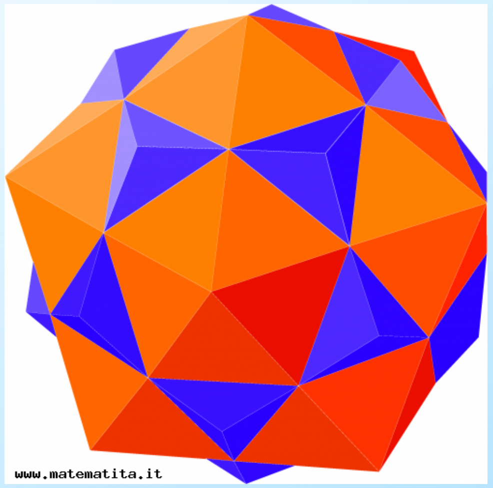
Si tratta di una definizione, basata sulla simmetria, che risponde all'immagine intuitiva che abbiamo di regolarità (cfr Swarowski…) e si presta meglio, e in maniera più corretta, alle varie generalizzazioni. *Va dritta al punto.*

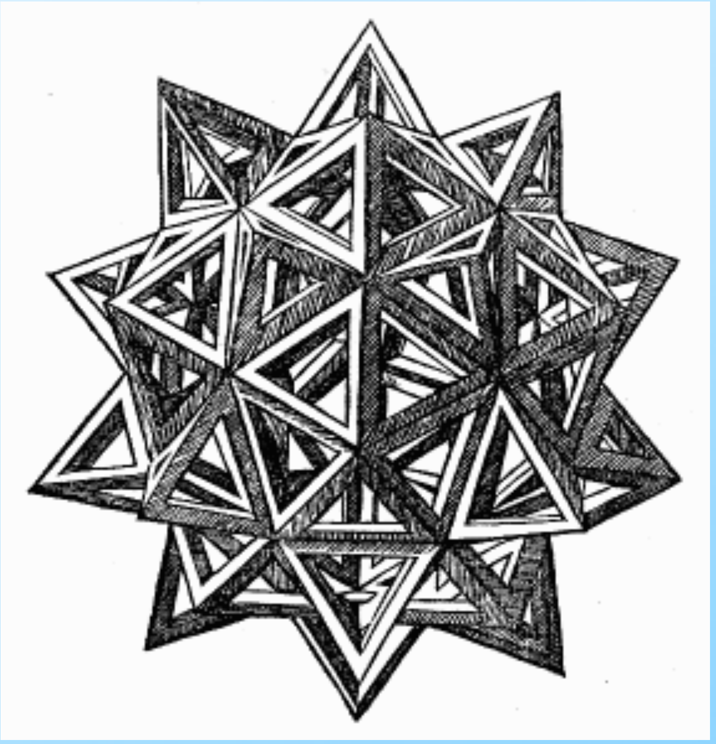


Il poliedro di sinistra è più simmetrico di quello di destra. In quello di destra i vertici **NON** sono indistinguibili, *nonostante che in ogni vertice arrivino 3 quadrati e un triangolo.*



Una bella storia

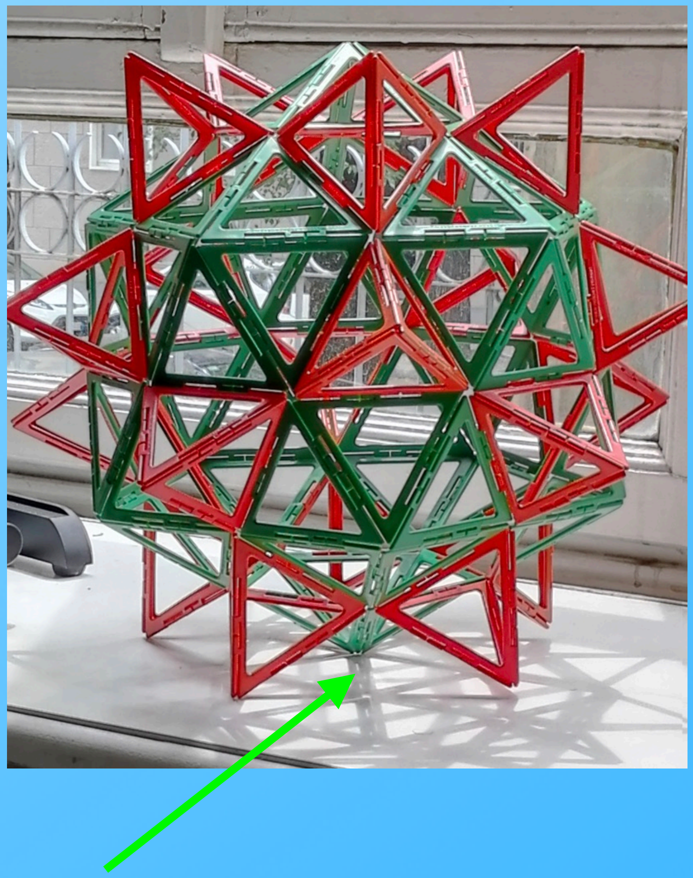


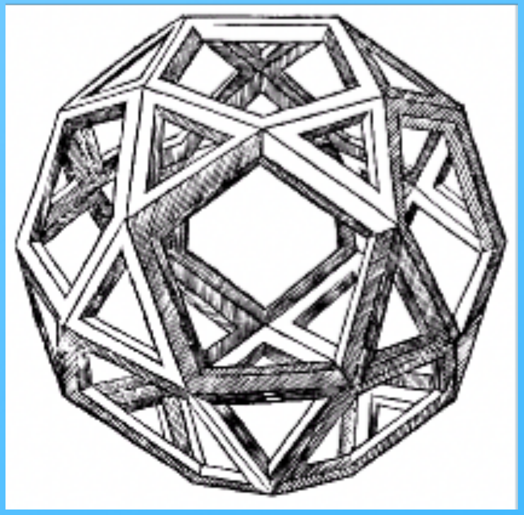


Scrive Luca Pacioli:

E cascando in piano questo sempre si ferma in 6 ponte o coni piramidali [in 6 vertici]. De li quali coni uno sia de pyramide pentagona e li altri 5 sono dele pyramidi triangule. La qual cosa … pare a l'ochio absurda che simil ponte sieno ad un piano.

C'è da fare i conti per capire se il vertice verde della piramide pentagonale appartiene o meno al piano individuato dai 5 vertici delle 5 piramidi triangolari che gli stanno intorno: questi 5 sono sicuramente complanari… *per simmetria*! Appartengono a un piano ortogonale all'asse di rotazione di ordine 5 del poliedro.



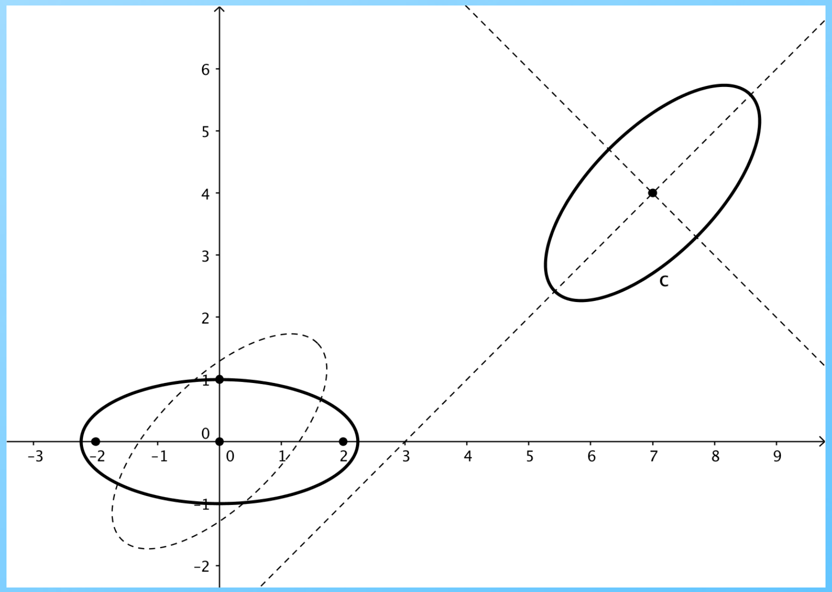


I sei punti **NON** sono complanari, ma… per poco…!

Simmetria come strumento per semplificare

Non solo in geometria…
e non solo parlando di figure!

Spesso la simmetria induce delle semplificazioni (l'**essenzialità**…).



La *forma canonica* delle coniche = fissare un sistema di riferimento opportuno che tenga conto della *simmetria* della conica che si sta considerando.

$$48x^2 - 64xy + 48y^2 - 416x + 64y + 1248 = 0 \longrightarrow x^2 + 5y^2 = 5$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$y=x+b/2a$$

La formula risolutiva dell'equazione di secondo grado: *completare il quadrato* significa proprio spostare l'origine dell'asse x nel baricentro delle radici, cioè tener conto della *simmetria*.

$$2x + 7z = 99$$
$$7x + 2y = 99$$
$$7y + 2z = 99$$

$x=y=z$ (=11).

A volte, notare una simmetria, o cercare di *simmetrizzare* una situazione può portare a conclusioni rapide (e eleganti).

$$y+z+t = 8$$
$$x+z+t = 6$$
$$x+y+t = 9$$
$$x+y+z = 10$$

$x+y+z+t = 33/3 = 11$, da cui…

Simmetria come struttura

Le permutazioni su 5 elementi.

Quante sono? Di che tipo? … (in rosso le pari, in blu le dispari)

cicli di lunghezza 5 -> sono 24 (abcde) -> (bcdea)

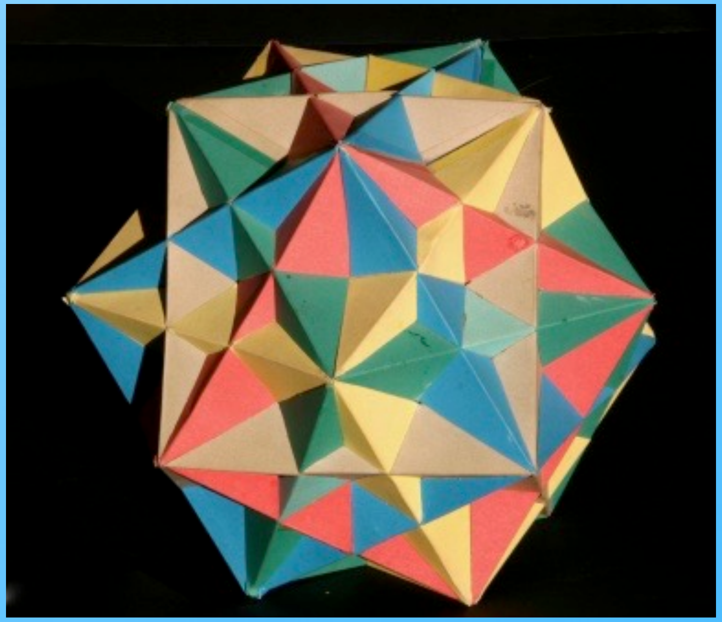
cicli di lunghezza 4 -> sono 5x6=30 (abcde) -> (acdeb)

cicli di lunghezza 3 -> sono 10x2=20 (abcde) -> (abdec)

cicli di lunghezza 2, ovvero scambi -> sono 10 (abcde) -> (abced)

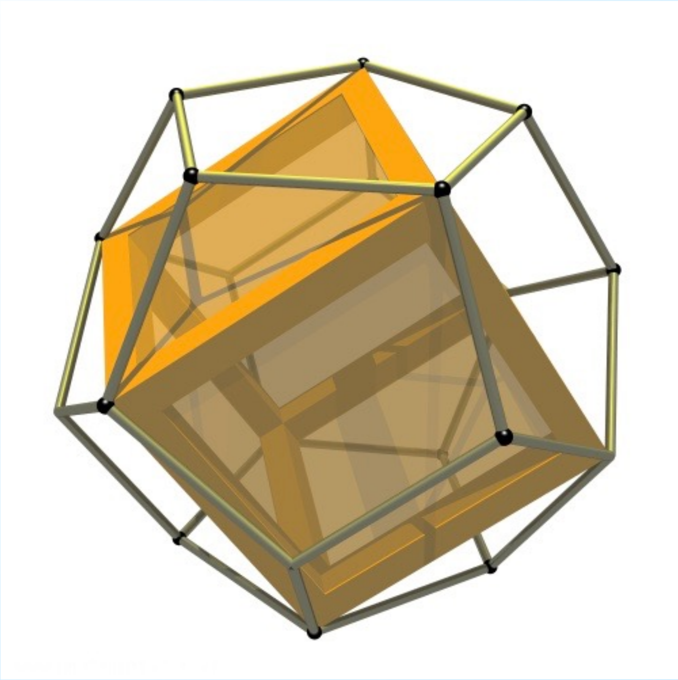
comp di due cicli di lunghezza 2 -> sono 5x3=15 (abcde) -> (acbed)

comp di due cicli, di lunghezza 2 e 3 -> sono 10x2=20 (abcde) -> (badec)

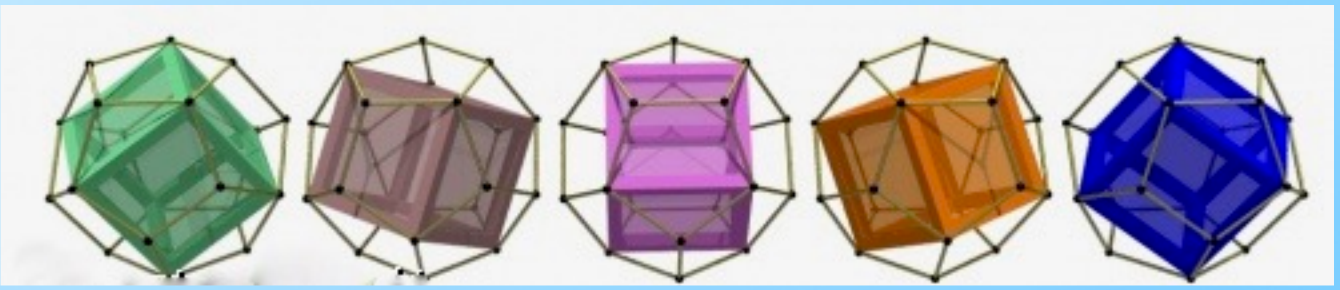


Le permutazioni (pari) si possono *vedere* in questi modelli, perché *corrispondono* alle isometrie dirette che fissano un dodecaedro (i due gruppi sono isomorfi).

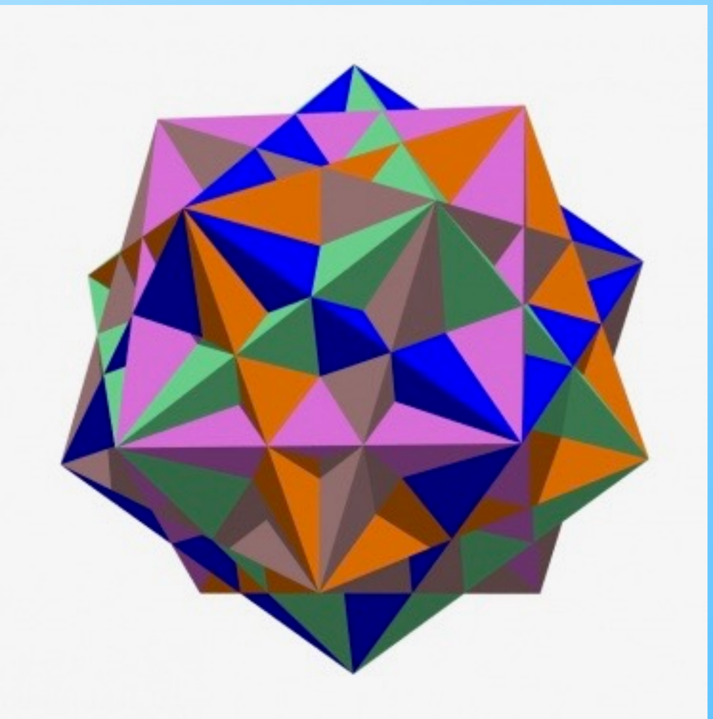
La corrispondenza si legge sui 5 cubi.

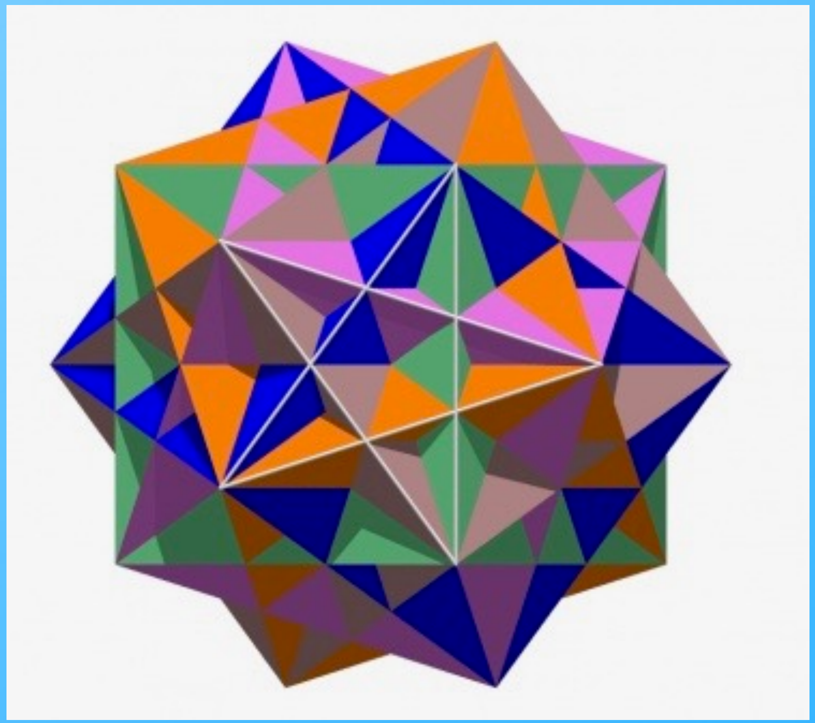


Cinque cubi nel dodecaedro



Il gruppo delle rotazioni del dodecaedro (le sole isometrie *dirette* che lo mandano in sé) è isomorfo al gruppo A_5 delle permutazioni pari su 5 elementi.
Però l'intero gruppo di simmetria del dodecaedro *non* è isomorfo all'intero gruppo S_5 di tutte le permutazioni su 5 elementi (ma è isomorfo a $A_5 \times \mathbf{Z}_2$).





Le permutazioni **pari** su 5 elementi.

cicli di lunghezza 5 -> sono 24
(abcde) -> (bcdea)

cicli di lunghezza 3 -> sono 10x2=20
(abcde) -> (abdec)

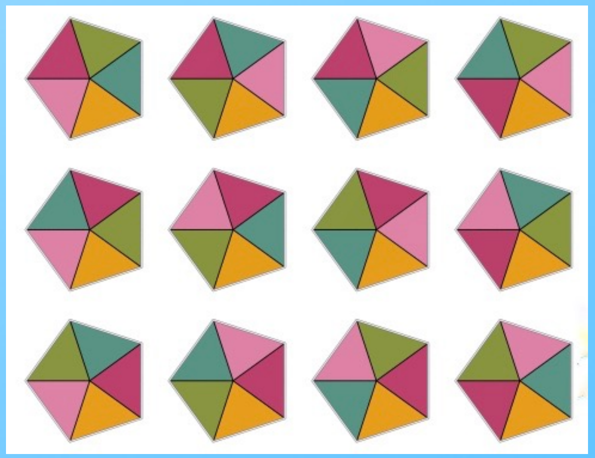
composizione di due cicli di lunghezza 2 -> sono 5x3=15
(abcde) -> (acbed)

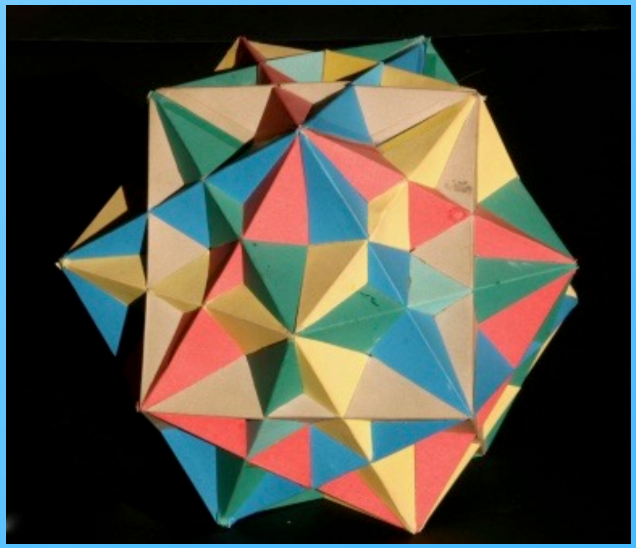
Le rotazioni di un dodecaedro.

di ordine 5 intorno a assi per i centri di due facce opposte -> sono 24 = 4x12/2 = 4 x F/2

di ordine 3 intorno a assi per due vertici opposti -> sono 20 = 2 x 20/2 = 2 x V/2

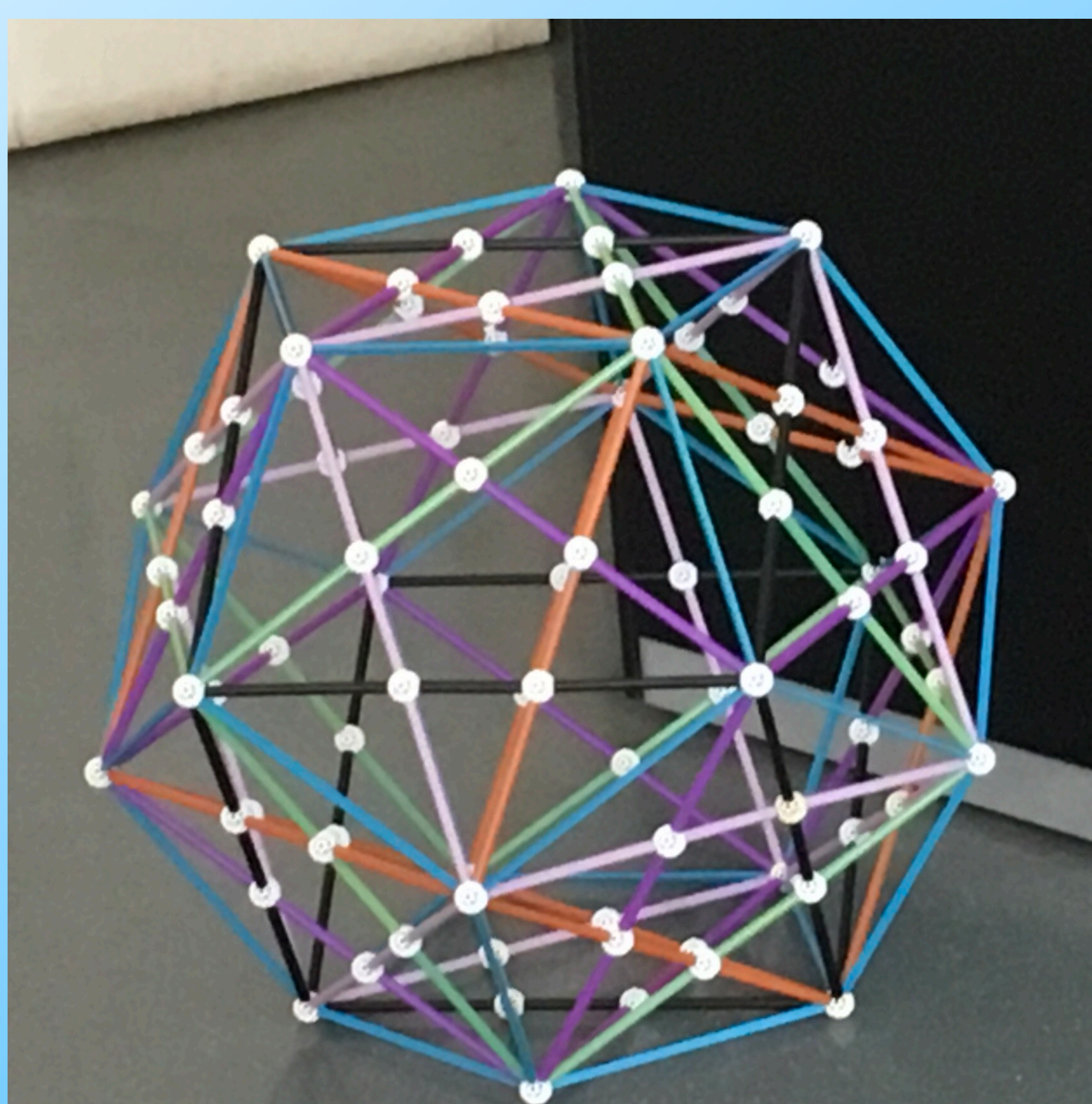
di ordine 2 intorno a assi per i punti medi di due spigoli -> sono 15 = 30/2 = S/2

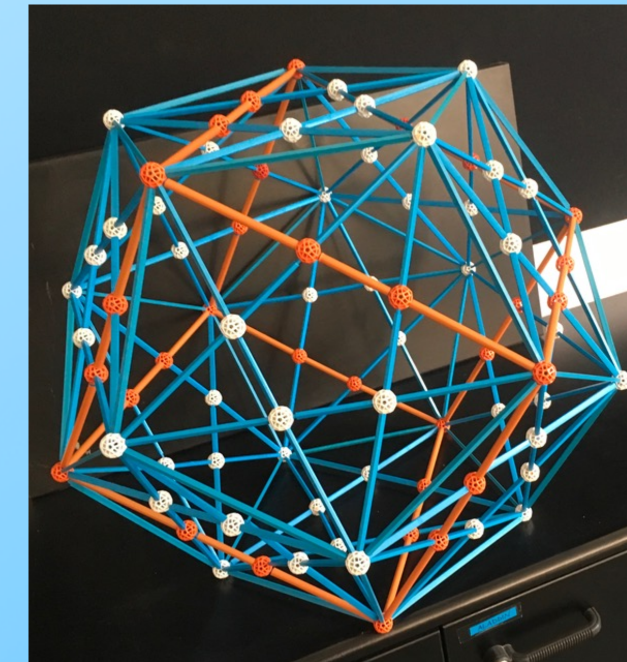


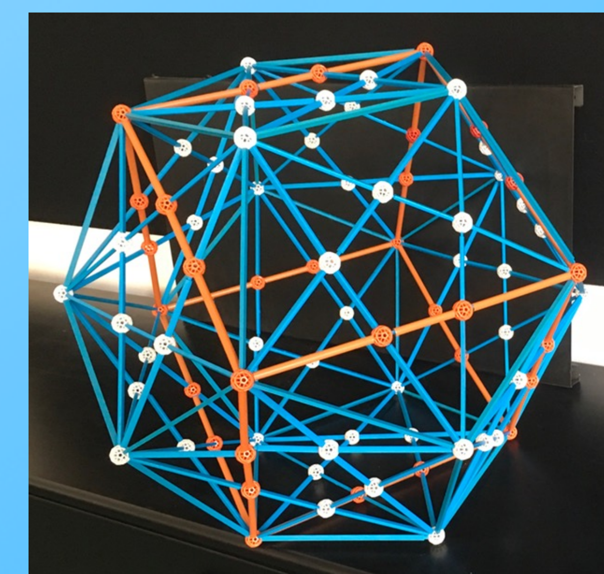


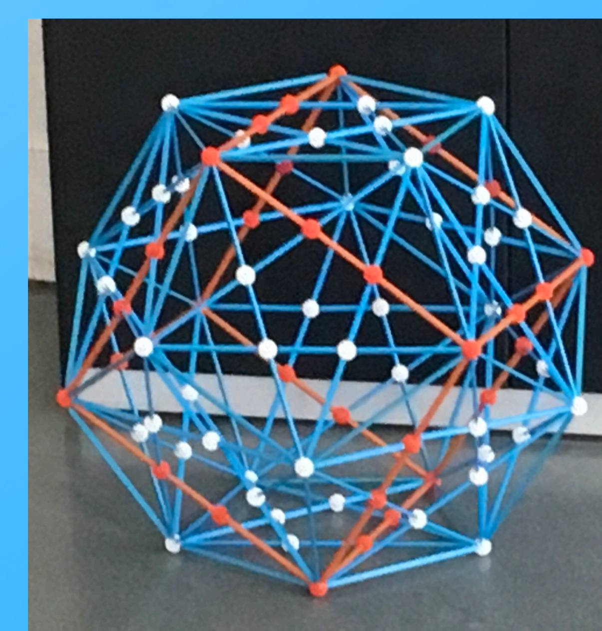
E nel modello si possono ritrovare molti altri fatti sulle permutazioni, per esempio:
Ci sono 10 maniere di scegliere 2 colori su 5; nei vertici del dodecaedro arrivano due cubi; i vertici del dodecaedro sono 20; vertici opposti hanno la coppia dello stesso colore.

… TUTTA COLPA SUA!









Per finire… uno spot pubblicitario: fino a giugno 2018 la mostra *Simmetria, giochi di specchi* è (anche) a Crotone, presso il parco Pitagora, in una sala che… sembra fatta apposta per una mostra di giochi di specchi…

Chi desidera essere informato su questo allestimento e le attività collaterali può lasciare nome e indirizzo mail sugli appositi fogli.

… grazie dell'attenzione!